第10回 倍角・半角の公式（計算式確認資料）

① 2倍角の公式

（cosについて）

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$

において、$\beta=\alpha$とおくと、

$$\cos(\alpha+\alpha)=\cos\alpha\cos\alpha-\sin\alpha\sin\alpha$$
$$=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$$

さらに変形すると、

$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$$
$$=1-2\sin^2\alpha$$
$$=2\cos^2\alpha-1$$

$\cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha$

$\sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha$

が得られる。

（tanについて）

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$$

において、$\beta=\alpha$とおくと、

$$\tan(\alpha+\alpha)=\frac{\tan\alpha+\tan\alpha}{1-\tan\alpha\tan\alpha}$$

$$\tan 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$$ が得られる。

② 3倍角の公式

$3\alpha=2\alpha+\alpha$として、加法定理と2倍角の公式を用いると、

$$\sin(2\alpha+\alpha)=\sin2\alpha\cos\alpha+\cos2\alpha\sin\alpha$$
$$=2\sin\alpha\cos\alpha\cos\alpha+(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)\sin\alpha$$
$$=2\sin\alpha\cos^2\alpha+\sin\alpha\cos^2\alpha-\sin^3\alpha$$
$$=2\sin\alpha(1-\sin^2\alpha)+\sin\alpha(1-\sin^2\alpha)-\sin^3\alpha$$
$$=2\sin\alpha-2\sin^3\alpha+\sin\alpha-\sin^3\alpha-\sin^3\alpha$$
$$\sin3\alpha=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha \quad /\!/$$

$$\cos(2\alpha+\alpha)=\cos2\alpha\cos\alpha-\sin2\alpha\sin\alpha$$
$$=(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)\cos\alpha-2\sin\alpha\cos\alpha\sin\alpha$$
$$=\cos^3\alpha-\sin^2\alpha\cos\alpha-2\sin^2\alpha\cos\alpha$$

カッコの前のマイナスに注意!!

$$=\cos^3\alpha-(1-\cos^2\alpha)\cos\alpha-2(1-\cos^2\alpha)\cos\alpha$$
$$=\cos^3\alpha-\cos\alpha+\cos^3\alpha-2\cos\alpha+2\cos^3\alpha$$
$$\cos3\alpha=-3\cos\alpha+4\cos^3\alpha \quad /\!/$$

③ 半角の公式

2倍角の公式 $\cos2\alpha=2\cos^2\alpha-1$ を変形すると、

$$\cos^2\alpha=\frac{1+\cos2\alpha}{2}$$

αの代わりに$\frac{\alpha}{2}$とおくと、

$$\cos^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1+\cos\alpha}{2} \quad /\!/$$

また、$\tan^2\alpha=\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}$より、

$$\tan^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha} \quad /\!/$$